

# 1.1 RAČUNANJE Z DOGODKI

© Gorazd Lešnjak, FERI 2007

**Poskus:** skupek (kompleks) pogojev, ki ga je mogoče realizirati poljubno mnogokrat, oznaka  $\mathcal{G}$ .

**Dogodek:** rezultat poskusa.

**Gotov dogodek:** dogodek, ki se zgodi v vsaki izvedbi poskusa  $\mathcal{G}$ , oznaka  $G$ .

**Nemogoč dogodek:** dogodek, ki se ne more zgoditi v nobeni izvedbi poskusa  $\mathcal{G}$ , oznaka  $N$ .

**Naključni dogodek:** dogodek, za kakršnega ni mogoče vnaprej napovedati, ali se bo ob izvedbi poskusa  $\mathcal{G}$  zgodil ali ne. Oznaka za takšne dogodke bo izbrana velika tiskana črka, npr.  $A, B, \dots$  ali pa opis z besedo, npr. *šestica, trije asi, \dots*

Dogodek  $A$  je **način** dogodka  $B$ , če se vsakič, ko se v poskusu  $\mathcal{G}$  zgodi dogodek  $A$ , zgodi tudi dogodek  $B$ . Oznaka  $A \subseteq B$  izhaja iz dejstva, da je v kakršnemkoli zaporedju izvedb poskusa  $\mathcal{G}$  v takšnem primeru množica  $M_A$  tistih izvedb, v katerih se je zgodil dogodek  $A$ , podmnožica dogodku  $B$  prirejene množice  $M_B$ .

Veljajo **pravila**:

$$\begin{aligned} N &\subseteq A \subseteq A \subseteq G, \\ A &\subseteq B \Leftrightarrow B \supseteq A, \\ A &\subseteq B \text{ in } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C. \end{aligned}$$

Dogodka  $A$  in  $B$  sta **enaka** (sta pravzaprav isti dogodek), če se pri izvajanju poskusa  $\mathcal{G}$  lahko zgodita samo hkrati. Drugače povedano: če se zgodi  $A$ , se zgodi tudi  $B$ , in obratno. Kot je to običajno, enakost zapišemo kot  $A = B$  in velja, da je enakost  $A = B$  ekvivalentna  $A \subseteq B$  in  $B \subseteq A$ . Seveda je tudi to posledica dejstva, da je  $M_A = M_B$ .

**Produkt** (ali **preseka**) dogodkov  $A$  in  $B$  je dogodek, označimo ga kar  $AB$  ali tudi  $A \cap B$ , ki se zgodi v tistih realizacijah poskusa  $\mathcal{G}$ , v katerih se  $A$  in  $B$  zgodita **hkrati**. Seveda je zato  $AB = BA$ , vse lastnosti preseka množic veljajo tudi v tem primeru:

$$AB \subseteq A, \quad AN = N, \quad AG = A \text{ in } AA = A.$$

Z indukcijo ali kako drugače ugotovimo, da je  $ABC = (AB)C = A(BC)$  dogodek, da se dogodki  $A, B$  in  $C$  zgodijo hkrati. Za produkt večjega števila dogodkov uporabimo zapis  $\bigcap_{k \in I} A_k$ , tu je  $I$  oznaka za množico indeksov ( $I \subseteq \mathbb{N}$ ).

Pravimo, da sta dogodka  $A$  in  $B$  **nezdružljiva**, če se ne moreta zgoditi hkrati (torej v isti izvedbi poskusa  $\mathcal{G}$ ). Dogodek  $AB$  se torej ne more zgoditi, zato je  $AB = N$ .

**Vsota** (ali **unija**) dogodkov  $A$  in  $B$  je dogodek, ki se zgodi v tistih izvedbah poskusa  $\mathcal{G}$ , v katerih se zgodi vsaj en izmed obeh dogodkov. Oznaka:  $A \cup B$ , v starejši literaturi pogosto tudi  $A + B$ , kar pa raje uporabljamo za poseben primer, in sicer, ko gre za vsoto nezdružljivih dogodkov. V splošnem veljajo zveze:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, \quad A \subseteq A \cup B, \quad N \cup A = A, \\ G \cup A &= G \text{ in } G \cup A = G. \end{aligned}$$

Podobno kot prej za produkt lahko uvedemo tudi vsote večjega števila dogodkov, tako je  $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  in tudi simbol  $\bigcup_{k \in I} A_k$  označuje dogodek, ko se

zgodí vsaj en izmed dogodkov  $A_k$ , ko  $k$  preteče množico indeksov  $I$ . Za vsote nezdružljivih dogodkov uporabljamo zapisa  $A + B + C$  in  $\sum_{k \in I} A_k$ .

Vsakemu dogodku  $A$  lahko priredimo dogodek, ki se zgodi natanko tedaj, kadar se  $A$  ne zgodi; imenujemo ga **nasprotni dogodek (negacija)** dogodka  $A$  in označimo z  $\overline{A}$ . Velja  $A + \overline{A} = G$ . Ta pojem ustreza komplementu v teoriji množic, zato veljata de Morganova zakona:

$$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{in} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}.$$

Tudi operaciji razlika množic in simetrična razlika množic (razloček) imata analogni operaciji nad dogodki.

Dogodek  $A$  imenujemo **sestavljen**, če obstajata takšna nezdružljiva dogodka  $A$  in  $B$ , noben od njiju nemogoč, da je  $A + B = C$ . V tem primeru torej velja, da je  $N \neq A \neq C$  in  $A \subseteq C$ . Slednje včasih zapišemo strogo:  $A \subset C$ . Dogodek, ki ni sestavljen, je **elementaren** ali **izid**. Pozor: oba pojma sta odvisna od tega, za kakšen poskus  $\mathcal{G}$  gre. Pri metu igralne kocke je dogodek  $E$ , da pade ena pika, elementaren, pri metu dveh kock, npr. črne in bele, pa je dogodek  $D$ , da na črni kocki pade ena pika, sestavljen, saj se lahko zgodi na različne načine v odvisnosti od števila pik na beli kocki.

**Popoln sistem** dogodkov v izbranem poskusu  $\mathcal{G}$  je tak nabor (družina) dogodkov  $\mathcal{S}$ , da se v vsaki izvedbi poskusa zgodi natanko en izmed dogodkov v  $\mathcal{S}$ . Če je ta nabor končen, npr.  $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , velja  $G = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ . Npr., pri metu igralne kocke imamo popolne sisteme  $\mathcal{S}_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_6\}$ , kjer  $A_j$  pomeni dogodek, da je padlo  $j$  pik,  $\mathcal{S}_2 = \{A_1, \overline{A_1}\}$ ,  $\mathcal{S}_3 = \{L, S\}$ , kjer  $L$  pomeni, da je padlo liho število pik in  $S = \overline{L}$ , itd. V vsakem poskusu imamo glede na poljuben izbran dogodek  $D$  popoln sistem  $\mathcal{S}_D = \{D, \overline{D}\}$ .

**Algebra dogodkov** je takšna družina dogodkov  $\mathcal{A}$ , da nam izvajanje zgoraj navedenih operacij z dogodki iz  $\mathcal{A}$  vedno da rezultat, ki je tudi dogodek v  $\mathcal{A}$ . Formalno lahko to dosežemo z zahtevama:

- i)  $D \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{D} \in \mathcal{A}$ , in
- ii)  $A$  in  $B$  sta v  $\mathcal{A} \Rightarrow AB \in \mathcal{A}$ .

Podobno strukturo, ki v množici  $\mathcal{B}$  dogodkov dopušča števno mnogokratno uporabo operacij, pa je rezultat še vedno v družini  $\mathcal{B}$ , imenujemo  $\sigma$ -**algebra** (beri: sigma algebra).